ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Ασκηση 1:

Για τις διάφορες τιμές του θετικού ακεραίου ν, να υπολογιστεί το άθροισμα: $S = i + i^2 + i^3 + \ldots + i^\nu$

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για γεωμετρική πρόοδο με λόγο i και ν-οστό όρο το i^ν.

Άρα, $S = i\,\dfrac{i^\nu - 1}{i-1}$.

- Για $\nu = 4k$,

$$S = i\,\frac{i^{4k}-1}{i-1} = i\,\frac{1-1}{i-1} = 0$$

- Για $\nu = 4k+1$

$$S = i\,\frac{i^{4k+1}-1}{i-1} = i\,\frac{i^{4k}\cdot i - 1}{i-1} = i\,\frac{i-1}{i-1} = i$$

- Για $\nu = 4k+2$

$$S = i\,\frac{i^{4k+2}-1}{i-1} = i\,\frac{i^{4k}\cdot i^2 - 1}{i-1} = i\,\frac{-1-1}{i-1} = -\frac{2i}{i-1} =$$

$$= -\frac{\cancel{2}i(-1-i)}{\cancel{2}} = i(i+1) = i-1.$$

- Για $\nu = 4k+3$

$$S = i\,\frac{i^{4k+3}-1}{i-1} = i\,\frac{i^{4k}\cdot i^3 - 1}{i-1} = i\,\frac{-i-1}{i-1} = i\,\frac{1+i}{1-i} =$$

$$= i\,\frac{(1+i)^2}{2} = \frac{i}{2}(1+2i+i^2) = \frac{i}{\cancel{2}}\,\cancel{2}i = -1.$$

Άσκηση 2:

Για τις διάφορες τιμές του θετικού ακεραίου ν, να υπολογίσετε το άθροισμα:

$S_\nu = i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + \nu i^\nu$

ΛΥΣΗ

Είναι:

$S_\nu = i(1 + 2i + 3i^2 + \dots + \nu i^{\nu-1})$

Έστω, $S(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^\nu \Rightarrow S'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + \nu x^{\nu-1}$

Άρα, $S'(i) = 1 + 2i + 3i^2 + \dots + \nu i^{\nu-1}$.

Δηλαδή, έχουμε ότι:

$S_\nu = i \cdot S'(i)$ (1)

Όμως, $S(x)$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο x και ν-οστό όρο το x^ν. Επομένως, ισοδύναμα γράφεται:

$$S(x) = x \cdot \frac{x^\nu - 1}{x - 1} = \frac{x^{\nu+1} - x}{x - 1}, \quad x \neq 1$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της S, $x \neq 1$

$$S'(x) = \frac{((\nu+1)x^\nu - 1)(x-1) - x^{\nu+1} + x}{(x-1)^2} = \frac{(\nu+1)x^{\nu+1} - (\nu+1)x^\nu - \cancel{x} + 1 - x^{\nu+1} + \cancel{x}}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{\nu \cdot x^{\nu+1} - (\nu+1)x^\nu + 1}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1$$

Έτσι,

$$S'(i) = \frac{\nu \cdot i^{\nu+1} - (\nu+1) i^\nu + 1}{(i-1)^2}.$$

Άρα, $$S_\nu = i \cdot \frac{\nu \cdot i^{\nu+1} - (\nu+1) i^\nu + 1}{(i-1)^2} = \frac{\nu \cdot i^{\nu+2} - (\nu+1) i^{\nu+1} + i}{(i-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_\nu = \frac{-(\nu+1) i^{\nu+1} - \nu \cdot i^\nu + i}{(i-1)^2}.$$

- Για $\nu = 4k$, $$S_{4k} = \frac{-(4k+1) \cdot i^{4k+1} - 4k \cdot i^{4k} + i}{(i-1)^2} =$$

$$= \frac{-(4k+1) \cdot i - 4k + i}{(i-1)^2} = \frac{-4ki - 4k}{(i-1)^2} = -4k \frac{(i+1)}{(i-1)^2} =$$

$$= 4k \cdot \frac{(i+1)}{2i} = \cancel{4}k \frac{(i+1)(-2i)}{\cancel{4}} = -2k - 2ki$$

• Για $\nu=4k+1$, $S_{4k+1}=\dfrac{-(4k+2)i^{4k+2}-(4k+1)i^{4k+1}+i}{(i-1)^2}=$

$=\dfrac{(4k+2)-(4k+1)i+i}{(i-1)^2}=-\dfrac{4k+2-4ki}{2i}=\dfrac{(4ki-4k-2)(-2i)}{4}=$

$=\dfrac{8k}{4}+\dfrac{8ki+4i}{4}=2k+(4k+2)i$

• Για $\nu=4k+2$, $S_{4k+2}=\dfrac{-(4k+3)i^{4k+3}-(4k+2)i^{4k+2}+i}{(i-1)^2}=$

$=\dfrac{(4k+3)i+(4k+2)+i}{(i-1)^2}=\dfrac{-(4k+4)i-(4k+2)}{2i}=$

$=\dfrac{(-(4k+4)i-(4k+2))(-2i)}{4}=\dfrac{-8k-8+(8k+4)i}{4}=$

$=-(2k+2)+(2k+1)i$

• Για $\nu=4k+3$, $S_{4k+3}=\dfrac{-(4k+4)i^{4k+4}-(4k+3)i^{4k+3}+i}{(i-1)^2}=$

$=\dfrac{4k+4-(4k+4)i}{2i}=\dfrac{(4k+4-(4k+4)i)(-2i)}{4}=$

$=\dfrac{-(8k+8)-(8k+8)i}{4}=-(2k+2)-(2k+2)i$

για καθε $k\in\mathbb{N}$.

<u>Ασκηση 4</u>:

Να υπολογίσετε τους μιγαδικους:

i) $\pm i\cdot z$ και ii) $z/\pm i$ (όχι απόδειξη απο τον τύπο)

<u>ΛΥΣΗ</u>.

i) Εστω $z=\rho\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

Τοτε,

$\pm i\cdot z=\pm i\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\pm\rho(-\sin\varphi+i\cos\varphi)=$

$=\rho\left(\cos\left(\varphi\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\varphi\pm\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Η γεωμετρική ερμηνεία αυτό είναι ότι το γινόμενο τυχόντος $z\in\mathbb{C}$ με το μιγαδικό i (αντιστ. $-i$) ουσιαστικά θα στρέψει το μιγαδικό αριθμό z κατα γωνία $\frac{\pi}{2}$

(αντίστ. $-\frac{\pi}{2}$).

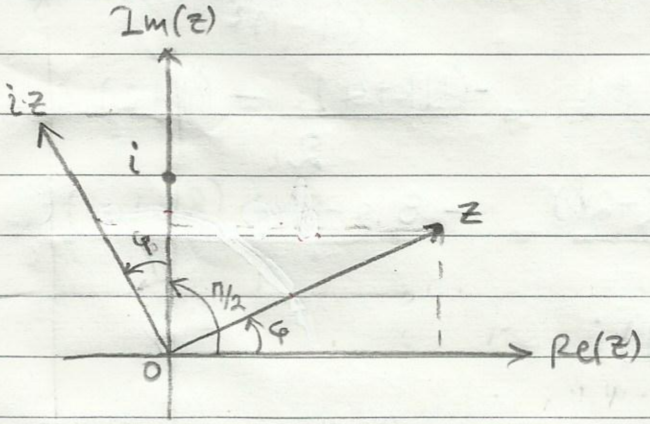
ii) Η παρατήρηση εδώ είναι ότι:

$$\frac{z}{\pm i} = \mp i z \overset{(i)}{=} \rho\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \varphi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} \mp \varphi\right)\right)$$

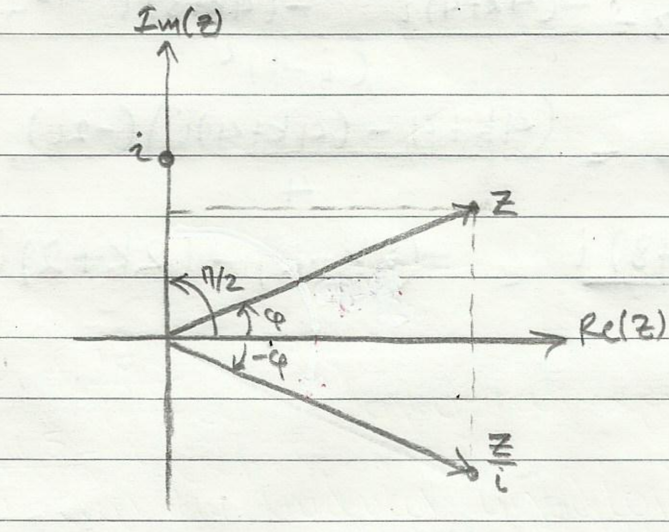
Όπου και εδώ η γεωμετρική ερμηνεία είναι η αντίστροφη με την γεωμετρική ερμηνεία της (i).

ΜΙΑ ΓΕΝΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΩΝ

i)



ii)



Άσκηση 4

Έστω το σύνολο $A=\{z : z^5=\bar{z}\}$, $\forall z\in\mathbb{C}$

Ποια είναι τα z που ανήκουν στο σύνολο A;

ΛΥΣΗ

Εάν $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ η τριγωνομετρική μορφή του z τότε από το Θεώρημα De Moivre:

$z^5=\rho(\cos(5\varphi)+i\sin(5\varphi))$.

Έστω λοιπόν $z\in A \Rightarrow z^5=\bar{z} \Rightarrow |z|^5=|\bar{z}|=|z|=\rho \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho^5=\rho \Rightarrow \rho^4=1 \Rightarrow \rho=1$.

Άρα, έχουμε ότι:

$(\cos(5\varphi)+i\sin(5\varphi))=\cos\varphi-i\sin\varphi \Leftrightarrow$

$(\cos(5\varphi)+i\sin(5\varphi))(\cos\varphi+i\sin\varphi)=1 \Leftrightarrow$

$\cos(5\varphi)\cdot\cos\varphi-\sin(5\varphi)\sin\varphi+i(\sin(5\varphi)\cos\varphi+\sin\varphi\cos(5\varphi))=1 \Leftrightarrow$

$\cos(5\varphi+\varphi)+i\sin(5\varphi+\varphi)=1 \Leftrightarrow$

$\cos(6\varphi)+i\sin(6\varphi)=1 \Leftrightarrow$

$\cos(6\varphi)=1$ και $\sin(6\varphi)=0 \Leftrightarrow$

$6\varphi=2k\pi$ και $6\varphi=\lambda\pi$, $\forall k,\lambda\in\mathbb{Z}$

Συναληθευτικά, $6\varphi=2k\pi \Leftrightarrow \varphi=\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

Άρα, ο $z\in A$ έχει μορφή:

$z=1\left(\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right)=\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$

Άσκηση 5:

Δίνεται ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z.

Να προσδιορίσετε τον κλάδο της $\sqrt{z}$ για τον οποίο ισχύει $\sqrt{1}=-1$.

ΛΥΣΗ

$w^2=z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow$

ΚΛΑΔΟΙ $w_k=\sqrt{z}_k$, $k=0,1$

$\Rightarrow \begin{cases} w_0=\sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ w_1=\sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right)\right]=-\sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]. \end{cases}$

και θέλουμε εκείνο τον κλάδο ώστε $\sqrt{1}=-1$, όταν $z=1$.

Έστω λοιπόν $z=1 \Rightarrow |z|=\rho=1$ και $\theta=Arg(z)=0$

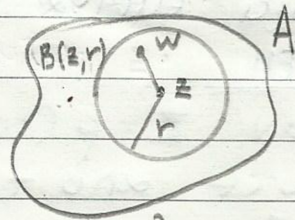
Έτσι, ο πρώτος δίνει: $\sqrt{1}=-1=\cos 0+i\sin 0=1$ Αδύνατον

ο δεύτερος δίνει: $\sqrt{1}=-1=\cos\pi+i\sin\pi$ ισχύει

Άσκηση 6:

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $A=\{z : |z^2-1|<1\}$ είναι ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$

ΛΥΣΗ



Έστω $z\in A \Rightarrow |z^2-1|<1$. (1)

A ανοιχτό αν.ν $(\exists r>0) : B(z,r)\subseteq A$

Έστω λοιπόν $w\in B(z,r)$ και Θδο $w\in A \Rightarrow |w^2-1|<1$

τότε $|w-z|<r$. (2)

Παίρνουμε το:

$$|w^2-1| = |w^2-z^2+z^2-1| \le |w^2-z^2|+|z^2-1| =$$
$$= |w-z||w+z| + |z^2-1| \le |w-z|(|w|+|z|)+|z^2-1| \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}}$$
$$r(|w|+|z|)+1 . \quad (3)$$

Όμως $|w|-|z| < |w-z| < r \Rightarrow |w| < r+|z|$

Άρα, η (3) γίνεται:

$$|w^2-1| \le r(r+2|z|)+1 \quad .(4)$$

Επομένως, αρκεί να επιλέξουμε ως ακτίνα r:

$$0<r<\min\left\{1, \frac{1-|z^2-1|}{1+2|z|}\right\}.$$

Τότε, η (4) γίνεται:

$$|w^2-1| \le r(1+2|z|)+1 = 1-|z^2-1|+1 =$$
$$= 2-|z^2-1| < 2-1 = 1.$$

Άσκηση 7:

Να αποδείξετε ότι, για κάθε $a\in\mathbb{R}$ και $p\in(0,1)$ ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+p\cos a+p^2\cos(2a)+\dots+p^n\cos(na)\right) = \frac{1-p\cos a}{1-2p\cos a+p^2}$$

ΛΥΣΗ

Θεωρώ $x_n = 1+p\cos a+p^2\cos(2a)+\dots+p^n\cos(na)$

και $y_n = p\sin a+p^2\sin(2a)+\dots+p^n\cos(na)$

Παίρνουμε στη συνέχεια τη μιγαδική ακολουθία $z_n = x_n+iy_n =$
$= 1+p(\cos a+i\sin a)+\dots+p^n(\cos(na)+i\sin(na))$.

Θέτουμε $w=p(\cos a+i\sin a)$, τότε

$w^2 = \rho^2(\cos(2a) + i\sin(2a))$, ..., $w^n = \rho^n(\cos(na) + i\sin(na))$

Συνεπώς, $Z_n = 1 + w + w^2 + \dots + w^n = \dfrac{w^{n+1} - 1}{w - 1}$.

Υπολογίζουμε το εξής όριο

$$\lim Z_n = \lim \frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = \lim \frac{\rho^{n+1}\cos((n+1)a) + i\rho^{n+1}\sin((n+1)\alpha) - 1}{w - 1} =$$

$$\underset{\substack{\cos((n+1)a) \\ \sin((n+1)\alpha)\end{substack}}\text{ φραγμ.}}{\overset{\rho^{n+1} \to 0 \ (\rho \in (0,1))}{=}} \lim \frac{-1}{w - 1} = \lim \frac{1}{1 - w} = \frac{1}{1 - \rho\cos a - i\rho\sin a} =$$

$$= \frac{1 - \rho\cos\alpha + i\sin a}{1 - 2\rho\cos\alpha + \rho^2}.$$

Άλλα, το $\lim X_n = \lim Re\left(\dfrac{1}{1 - w}\right) = \dfrac{1 - \rho\cos a}{1 - 2\rho\cos\alpha + \rho^2}$

Άσκηση 8.

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του $z \in \mathbb{C}$ των οποίων η χορδική απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι ίση με $|z|$.

ΛΥΣΗ

Δεδομένης της σχέσης δύο μιγαδικών z και w εν $\mathbb{C}$:

$$\chi(z, w) = \begin{cases} \dfrac{2|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}}, & \forall z, w \in \mathbb{C} \\ \dfrac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}, & z \in \mathbb{C} \text{ και } w = \infty \end{cases}$$

δίνεται ότι $\chi(z, 0) = |z| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2|z|}{\sqrt{1 + |z|^2}} = |z| \Leftrightarrow |z|\left(2 - \sqrt{1 + |z|^2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z| = 0 \text{ ή } 2 - \sqrt{1 + |z|^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ή } |z| = \sqrt{3}.$$

Άρα, ο γ.τ είναι το σημείο $z = 0$ ή ένας κύκλος με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt{3}$.

Άσκηση 9.

Το μήκος τόξου μιας διαφορίσιμης καμπύλης (γ) με παραμετρική παράσταση: $z(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ κατόπιν αναπαραμέτρησης της (γ), παραμένει αναλλοίωτο.

ΛΥΣΗ

Έστω η $(\gamma): z(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ διαφορίσιμη καμπύλη

Έστω τώρα $t=t(s)$ μια γνήσια αύξουσα και λεία συνάρτηση, $s\in[\alpha',\beta']$ και τέτοια ώστε $t(\alpha')=\alpha$, $t(\beta')=\beta$

Τότε εξ ορισμού η συνάρτηση: $z_*(s)=z(t(s))$, για κάθε $s\in[\alpha',\beta']$ είναι αναπαραμέτρηση της καμπύλης (γ), και μάλιστα

$$\int_a^\beta |z(t)|dt = \int_{a'}^{\beta'} |z(t(s))|\cdot t'(s)\, ds = \int_{a'}^{\beta'} \left|\frac{d(z\circ t)}{ds}(s)\right| ds =$$

$$= \int_{a'}^{\beta'} |z_*'(s)|\, ds .$$

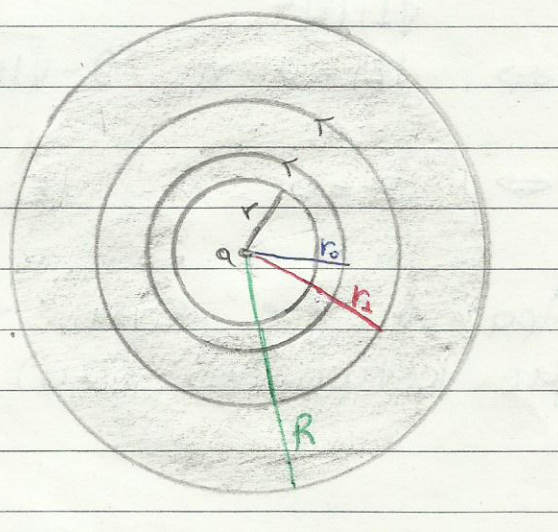
Άρα, το μήκος τόξου της (γ) δεν αλλάζει κατόπιν της αναπαραμέτρησης.

Άσκηση 10

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς $0, r, r_0, r_1, R$ με την διάταξη $0<r<r_0<r_1<R$ και ένα σημείο $\alpha\in\mathbb{C}$. Τότε να αποδείξετε ότι οι κύκλοι: $K(\alpha,r_0)$ και $K(\alpha,r_1)$ όταν έχουν την ίδια φορά, τότε είναι ομοτοπικοί στον δακτύλιο $\Delta(\alpha; r, R)$

ΛΥΣΗ

Έστω $K(\alpha,r_0)$ και $K(\alpha,r_1)$ κύκλοι θετικής φοράς.



$K(\alpha,r_0)=\{z: |z-a|=r_0\}=$

$=\{\,z-a=r_0(\cos t+i\sin t)\,|\,t\in[0,2\pi]\}$

$=\{\,z=a+r_0(\cos t+i\sin t)\,|\,t\in[0,2\pi]\}$

$K(\alpha,r_1)=\{z: |z-a|=r_1\}=$

$=\{\,z=a+r_1(\cos t+i\sin t)\,|\,t\in[0,2\pi]\}$

Έτσι, λοιπόν οι προσανατολισμένοι κύκλοι $K(\alpha, r_0)$ και $K(\alpha, r_1)$ έχουν παραμετρικές παραστάσεις $z_0(t) = r_0(\cos t + i\sin t)$ και $z_1(t) = r_1(\cos t + i \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ αντίστοιχα. Με μια πρώτη ματιά από το σχήμα φαίνεται ότι οι προσανατολισμένοι κύκλοι $K(\alpha, r_1)$, $K(\alpha, r_2)$ είναι πράγματι ομοτοπικοί στο δακτύλιο $\Delta(\alpha; r, R)$ (διότι μπορούν να μετακινηθούν, συρρόμενοι κατά συνεχή τρόπο στο $\Delta(\alpha; r, R)$ ώστε να ταυτιστούν). Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $H(t,s) := \alpha + [(1-s)r_0 + s r_1](\cos t + i \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $s \in [0,1]$ είναι μια συνάρτηση ομοτοπίας (αφού Η συνεχής ως προς τις μεταβλητές t, s, ισχύει $H(t,0) = z_0(t)$, $H(t,1) = z_1(t)$ και $\forall s \in [0,1]$ η συνάρτηση $H(t,s) = z(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ είναι παραμετρική παράσταση μιας κατά-τμήματα διαφορίσιμης κλειστής καμπύλης στο $\Delta(\alpha; r, R)$)

<u>Άσκηση 11</u>

Η εικόνα του τόπου $K := \{ z : |Re(z)| > |Im(z)| \}$ μέσω της $f(z) = z^2$ είναι το σύνολο $K^* = \{ w : Re(w) > 0 \}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω $w \in f(K) :\Rightarrow (\exists z \in K) : f(z) = w$

Αφού $z \in K$, με $z = x + iy \Rightarrow |x| > |y| \Rightarrow x^2 > y^2 \Rightarrow x^2 - y^2 > 0$ (1)

$f(z) = w \Rightarrow z^2 = w = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow (x+iy)^2 = u(x,y) + iv(x,y)$

$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow u(x,y) = x^2 - y^2 \overset{(1)}{>} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Re(f(z)) > 0 \Rightarrow Re(w) > 0 \Rightarrow w \in K^*$

Άρα, $f(K) \subseteq K^*$

Από την άλλη μεριά έστω $w \in K^* \Rightarrow Re(w) > 0$

όπου αν $w = u + iv \Rightarrow u > 0$.

Θδο $w \in f(K) \Rightarrow (\exists z \in K) : f(z) = w \Leftrightarrow z^2 = w$

Δηλαδή, αναζητούμε $z \in K : z^2 = w \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = u + iv \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 > 0 \\ v = 2xy \end{cases}$$

- Για $v = 0 \rightarrow x = 0$ ή $y = 0$ (Η $x = 0$ απορ. αφού $u > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow |x| > |y|$) οπότε $u = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{u}$

Άρα, ο μιγαδικός $z \in K$ είναι $z = \pm\sqrt{u} + i \cdot 0$

• Για $v \neq 0 \Rightarrow v = 2xy \Rightarrow y = \dfrac{v}{2x}$ ①

Αντικαθιστούμε στην άλλη σχέση:

$$u = x^2 - y^2 = x^2 - \frac{v^2}{4x^2} \Rightarrow 4x^4 - 4ux^2 - v^2 = 0.$$

$$\Delta = 16u^2 + 16v^2 = 16(u^2+v^2) = 16|w|^2.$$

Έτσι,

$$x_{1,2}^2 = \frac{4u \pm 4|w|}{2 \cdot 4} = \frac{u \pm |w|}{2} = \begin{cases} \dfrac{u+|w|}{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{u+|w|}{2}} \\ \dfrac{u-|w|}{2} = \dfrac{u-(u^2+v^2)}{2} < 0 \text{ Απορ.} \end{cases}$$

Επομένως στην ① έχουμε:

• $$y = \pm \frac{v}{2\sqrt{\dfrac{u+|w|}{2}}} = \pm \frac{v}{|v|} \cdot \sqrt{\frac{-u+|w|}{2}}$$

Άρα, ο $z \in K$ είναι:

$$z = \pm\sqrt{\frac{u+|w|}{2}} \pm i\frac{v}{|v|}\sqrt{\frac{-u+|w|}{2}}.$$

Άρα, και στις 2 περιπτώσεις ισχύει $|x| > |y|$ και άρα $w \in f(K)$. $\Rightarrow K^* \subseteq f(K)$.

Άσκηση 12

Να δείξετε ότι το σύνολο $A = \{z \in \mathbb{C} : 3|z|^6 < |z|^2 + 1\}$ είναι ανοιχτό και φραγμένο

ΛΥΣΗ

Έστω η συνάρτηση $f(z) = 3|z|^6 - |z|^2 - 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Άρα, $A = \{z \in \mathbb{C} : f(z) < 0\} = f^{-1}(-\infty, 0)$

Η συνάρτηση $z \mapsto |z|$ συνεχής (δηλ. $z_v \rightarrow z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow$ $\Rightarrow |z_v| \rightarrow |z_0| \in \mathbb{C}$). Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού είναι εύκολη. Αφού $z_v \rightarrow z_0 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists v_0)(\forall v): v \geq v_0 \Rightarrow |z - z_0| < \varepsilon$ αλλά $||z_v| - |z_0|| \leq |z_v - z_0| < \varepsilon$.

Επομένως, η f συνεχής ως πράξεις συνεχών.

Το διάστημα $(-\infty, 0)$ ανοιχτό και αφού f συνεχής τότε το $f^{-1}(-\infty, 0)$ ανοιχτό. Άρα, A ανοιχτό σύνολο

Έστω ότι A όχι φραγμένο

Τότε $(\forall \nu \in \mathbb{N})(\exists z_\nu \in A): |z_\nu| > \nu$

Άρα, αφού $z_\nu \in A \Rightarrow 3|z_\nu|^6 < |z_\nu|^2 + 1 \Rightarrow 3 < \dfrac{1}{|z_\nu|^3} + \dfrac{1}{|z_\nu|^6} <$

$< \dfrac{1}{\nu^3} + \dfrac{1}{\nu^6} \longrightarrow 0 \Rightarrow 3 < 0$ άτοπο

Άρα, αναγκαστικά A φραγμένο.

Άσκηση 13:

Να βρεθεί το σύνολο των σημείων όπου η συνάρτηση $f(z) = Arg(1-z^2)$ δεν είναι συνεχής.

ΛΥΣΗ

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι: $f(w) = Arg\,w$ δεν είναι συνεχής για εκείνα τα σημεία w τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $w + |w| = 0$. Άρα, εδώ για $w = 1 - z^2$:

$1 - z^2 + |1 - z^2| = 0$. (1)

Θέτω $z = x + iy$ και αντικαθιστώ στη σχέση (1).

$1 - (x+iy)^2 + |1 - (x+iy)^2| = 0 \Leftrightarrow$

$1 - x^2 + y^2 - 2xyi + |1 - x^2 + y^2 - 2xyi| = 0 \Leftrightarrow$

$1 - x^2 + y^2 + |1 - x^2 + y^2 - 2xyi| - 2xyi = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1 - x^2 + y^2 + |1 - x^2 + y^2 - 2xyi| = 0 \\ 2xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } y = 0 \end{cases}$$

- Για $x = 0 \rightarrow 1 + y^2 + |1 + \underbrace{y^2}_{>0}| = 0 \Rightarrow 2 + y^2 = 0$ Αδύνατη για κάθε $y \in \mathbb{R}$
- Για $y = 0 \rightarrow 1 - x^2 + |1 - x^2| = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = -|1 - x^2| < 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 1 - x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$ ή $x < -1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Άρα, η f δεν είναι συνεχής σε εκείνα τα σημεία που ικανοποιούν τις σχέσεις: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ & $y \in \mathbb{R}$

Ασκηση 14 :

Να προσδιοριστεί η εικόνα του κύκλου γ με παραμετρική παράσταση : $z(t) = r(\cos t + i\sin t)$, $\forall t \in [0,2\pi]$, $r>0$ μέσω της συνάρτησης : $f(z) = z - \frac{1}{z}$, $z \neq 0$

ΛΥΣΗ

Εφόσον το $t \in [0,2\pi]$ ο κύκλος είναι θετικά προσανατολισμένος. Η εικόνα $f(z(t)) = u(t) + iv(t)$, $\forall t \in [0,2\pi]$

$$f(z(t)) = z(t) - \frac{1}{z(t)} = r(\cos t + i\sin t) - \frac{1}{r(\cos t + i\sin t)} =$$

$$= r\cos t + ir\sin t - \frac{1}{r}(\cos t - i\sin t) =$$

$$= \left(r - \frac{1}{r}\right)\cos t + i\left(r + \frac{1}{r}\right)\sin t.$$

Επομένως, $u(t) = \left(r - \frac{1}{r}\right)\cos t$, $v(t) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\sin t$

Η εικόνα του θετικά προσανατολισμένου κύκλου είναι η έλλειψη που περιγράφεται από τη σχέση:

$\frac{u^2}{(r-\frac{1}{r})^2} + \frac{v^2}{(r+\frac{1}{r})^2} = 1$. όπου, θα έχει τις εστίες της στον άξονα $y'y$ αφού $r>0$ $\left(r-\frac{1}{r}\right)^2 < \left(r+\frac{1}{r}\right)^2$

Ασκηση 15

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(z) = z \cdot \mathrm{Im}(z)$ είναι ολόμορφη στο $z=0$.

ΛΥΣΗ

Έστω $z = x+iy \Rightarrow f(z) = (x+iy)y = x + iy^2$

f παραγωγίσιμη τότε θα ισχύουν οι συνθήκες C-R.

Δηλ. όταν
$$\left.\begin{aligned} u_x = v_y &\Leftrightarrow y = 2y \Leftrightarrow y = 0 \\ u_y = -v_x &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow x = y = 0$$

Έτσι, αν η f παραγωγίζεται σε κάποιο σημείο z τότε αυτό θα είναι το $z=0$. Επομένως, το μόνο που πρέπει να εξασφαλίσουμε είναι ότι η f παραγωγίζεται στο $z=0$

$h \neq 0$

$$\frac{f(h+z)-f(z)}{h} = \frac{f(\alpha+bi-0) - \cancel{f(0)}^{\,0}}{\alpha+bi} = \frac{\cancel{(\alpha+bi)}\, b}{\cancel{\alpha+bi}} = b$$

Άρα, πράγματι η f παραγωγίσιμη στο $z=0$.
Αλλά, f όχι ολόμορφη στο $z=0$, αφού δεν είναι παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του 0.

ΠΡΟΣΟΧΗ (SOS)

1) <u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Εάν $f: \mathcal{T} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{T}$: τόπος και $\exists f'(z_0)$ τότε ισχύουν οι συνθήκες των Cauchy-Riemann στο (x_0,y_0).
Το αντίστροφο ισχύει; (αντιπαράδειγμα: $f(z) = \begin{cases} \bar{z}^2/z, & z \neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$

2) <u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω $f: \mathcal{T} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{T}$: τόπος και $z_0 \in \mathcal{T}$.
Εάν u_x, u_y, v_x, v_y είναι συνεχείς στο (x_0,y_0) τότε $\exists f'(z_0)$ αν.ν ισχύουν οι συνθήκες των Cauchy και Riemann στο (x_0,y_0).

3) <u>Πόρισμα</u>: Εάν $f: \mathcal{T} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{T}$: τόπος με u_x, u_y, v_x, v_y συνεχείς στο $\mathcal{T}$ και ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann τότε η f ολόμορφη στον τόπο $\mathcal{T}$.

Άρα, η παραπάνω άσκηση μπορεί να λυθεί όχι μόνο με την Πρόταση αλλά και με το Θεώρημα

<u>Άσκηση 16</u>
Εάν $f: \mathcal{T} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{T}$: τόπος και f ολόμορφη στον $\mathcal{T}$, τότε δείξτε ότι:
i) $Re(f) = σταθ \Rightarrow f = σταθ.$
ii) $\bar{f}$ ολόμορφη $\Leftrightarrow f = σταθ.$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Δεδομένου ότι $Re(f(z)) = σταθ \Rightarrow u(x,y) = σταθ$

Αλλά f ολόμορφη και άρα ισχύουν οι συνθήκες C-R

δηλαδή, $u_x = v_y = 0$ και $u_y = -v_x = 0$, $\forall z \in \mathcal{C}$

Τότε, $f'(z) = 0 \Rightarrow f(z) = σταθ$, $\forall z \in \mathcal{C}$

ii) Έστω $f = σταθ \Rightarrow \bar{f} = σταθ \Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο $\mathcal{C}$.

$\Rightarrow \bar{f}$ ολόμορφη συνάρτηση

Αντίστροφα, έστω f ολόμορφη

$f(z) = u + iv$ και $\bar{f}(z) = u - iv$

Άρα, $f(z) - \bar{f}(z) = 2vi$ ολόμορφη $\Rightarrow$

$\Rightarrow Re((f-\bar{f})(z)) = 0 \xRightarrow{(i)} f - \bar{f} = σταθ = 2vi \Rightarrow v = σταθ$

Άρα, $v_x = v_y = 0$

Αλλά ούσα η f ολόμορφη ισχύουν οι συνθήκες C-R

και άρα $u_x = v_y = 0$ και $u_y = -v_x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(z) = 0 \Rightarrow f(z) = σταθ$, $\forall z \in \mathcal{C}$.

Άσκηση 17

Ποια τα σημεία $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία η συνάρτηση $f(z) = |z-2i|^2 + |z-1|^2$ παραγωγίζεται;

ΛΥΣΗ

Ισοδύναμη σχέση των συνθηκών Cauchy-Riemann είναι $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Γράφοντας την f στη μορφή:

$f(z) = (z-2i)(\bar{z}+2i) + (z-1)(\bar{z}-1)$, έχουμε:

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = (z-2i) + (z-1) = 0 \Rightarrow 2z - 2i - 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{2} + i$

Έπειτα, εξετάζουμε την παράγωγο στο $z = \frac{1}{2} + i$ (το οποίο είναι πιθανό σημείο παραγώγισης).

Παίρνουμε λοιπόν το πηλίκο διαφορών: $\forall h \neq 0$

$\frac{f(z+h) - f(h)}{h} =$

$$= \frac{f(\frac{1}{2}+i+h) - f(\frac{1}{2}+i)}{h} =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\left|\frac{1}{2}+i+h-2i\right|^2 + \left|\frac{1}{2}+i+h-1\right|^2 - \left|\frac{1}{2}+i-2i\right|^2 - \left|\frac{1}{2}+i-1\right|^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\left|\frac{1}{2}+h-i\right|^2 + \left|-\frac{1}{2}+h+i\right|^2 - \left|\frac{1}{2}-i\right|^2 - \left|-\frac{1}{2}+i\right|^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\left|\frac{1}{2}+h-i\right|^2 + \left|\frac{1}{2}-h-i\right|^2 - \left|\frac{1}{2}-i\right|^2 - \left|\frac{1}{2}-i\right|^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\left|\frac{1}{2}+h-i\right|^2 + \left|\frac{1}{2}-h-i\right|^2 - 2\left|\frac{1}{2}-i\right|^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left((\tfrac{1}{2}+h-i)(\tfrac{1}{2}+\bar{h}+i) + (\tfrac{1}{2}-h-i)(\tfrac{1}{2}-\bar{h}+i) - \frac{5}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{h}} 2\cancel{h}\bar{h} = 2\bar{h} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Επομένως, η f παραγωγίσιμη στο $z = \frac{1}{2}+i$.

Άσκηση 18

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$f(z) := |z^4| + 2|z^2| + 4\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$

Παραγωγίζεται μόνο στο $z_0 = -1$ και έχει $f'(z_0) = -4$

ΛΥΣΗ

$f(z) = z^2 \cdot \bar{z}^2 + 2z\bar{z} + 4\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 2\bar{z} \cdot z^2 + 2z + 4 = 2|z|^2 \cdot z + 2z + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z(|z|^2+1) + 4 = 0 \Rightarrow z = -\frac{2}{|z|^2+1} \in \mathbb{R}$$

Άρα, εάν $z = x+iy$ τότε

$$Im(z) = 0 \text{ και } Re(z) = -\frac{2}{|z|^2+1} \Rightarrow y = 0 \text{ και } x = -\frac{2}{x^2+y^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ και } x(x^2+y^2+1) + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ και } x^3 + x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ και } (x+1)(x^2-x+2) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ και } x = -1$$

Άρα, $z_0 = -1$ (πιθανόν να παραγωγίζεται)

Έπειτα, παίρνουμε το πηλίκο διαφορών πλην το -4:

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}+4=\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}+4=$$

$$=\frac{|h-1|^4+2|h-1|^2+4(\overline{h-1})-(-1)+4h}{h}=$$

$$=\frac{(h-1)^2(\overline{h-1})^2+2(h-1)(\overline{h-1})+4(\overline{h-1})-(-1)+4h}{h}=$$

$$=\frac{h^2\bar{h}^2-2h^2\bar{h}-2h\bar{h}^2+6h\bar{h}+\bar{h}^2+h^2}{h}=$$

$$=h\bar{h}^2-2h\bar{h}-2\bar{h}^2+6\bar{h}+\bar{h}\frac{\bar{h}}{h}+h\xrightarrow{h\to 0}0 \Rightarrow \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\to -4$$

Άσκηση 19:

Αν $Im(f(z))=e^x(x\eta\mu y+y\sigma\upsilon\nu y)$ και $f(\pi i)=-\pi i$, να βρεθεί η ολόμορφη συνάρτηση $f(z)$

ΛΥΣΗ

Έστω $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, όπου $v(x,y)=e^x(x\eta\mu y+y\sigma\upsilon\nu y)$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=e^x(x\eta\mu y+y\sigma\upsilon\nu y)+e^x\eta\mu y$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)=e^x(x\eta\mu y+y\sigma\upsilon\nu y)+2e^x\eta\mu y=e^x(x\eta\mu y+y\sigma\upsilon\nu y+2\eta\mu y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=(x\sigma\upsilon\nu y+\sigma\upsilon\nu y-y\eta\mu y)e^x$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)=e^x(x\eta\mu y+y\sigma\upsilon\nu y+2\eta\mu y)$$

Άρα, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial^2 v}{\partial^2 y}(x,y) \Rightarrow v$ αρμονική

Άρα, πρέπει να πληρούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann

$u_x=v_y \Rightarrow u_x=e^x(x\sigma\upsilon\nu y+\sigma\upsilon\nu y-y\eta\mu y)$ και επίσης

$u_y=-v_y \Rightarrow u_y=-e^x(x\eta\mu y+y\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu y)$

Ολοκληρώνοντας την 1^{η} ως προς x, παίρνουμε:

$$u = \sigma\upsilon\nu y \int x e^x dx + \sigma\upsilon\nu y \int e^x dx - y\eta\mu y \int e^x dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u = \sigma\upsilon\nu y \int x\, d(e^x) + e^x \sigma\upsilon\nu y - y e^x \eta\mu y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u = x e^x \sigma\upsilon\nu y - \sigma\upsilon\nu y \int e^x dx + e^x \sigma\upsilon\nu y - y e^x \eta\mu y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u = x e^x \cdot \sigma\upsilon\nu y - y e^x \eta\mu y + g(y) \xrightarrow[\text{ως προς } y]{\text{παραγωγίζω}}$$

$$\Rightarrow u_y = -x e^x \eta\mu y - e^x \eta\mu y - y e^x \sigma\upsilon\nu y + g'(y)$$

Εξισώνοντάς την λοιπόν με τη $2^η$ εξίσωση Cauchy-Riemann λαμβάνουμε ότι: $g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$, c: σταθ.

Άρα, $u = x e^x \cdot \sigma\upsilon\nu y - y e^x \eta\mu y + c$ και άρα:

$f(z) = (x e^x \sigma\upsilon\nu y - y e^x \eta\mu y + c) + i(x e^x \eta\mu y + y e^x \sigma\upsilon\nu y)$

Όπου:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

και

$$\eta\mu y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{iy}) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{1}{2}(z - \bar{z})} - e^{-\frac{1}{2}(z - \bar{z})}\right)$$

$$\sigma\upsilon\nu y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{1}{2}(z - \bar{z})} + e^{-\frac{1}{2}(z - \bar{z})}\right)$$

Αντικαθιστώντας, μετά από πράξεις

$$f(z) = z e^z + c \rightarrow f(\pi i) = \pi i\, e^{\pi i} + c \Rightarrow -\pi i = \pi i(-1) + c \Rightarrow c = 0$$

Επομένως,

$f(z) = z e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Άσκηση 20

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(z) := |z|^\nu$ για $|z| < 1$ συγκλίνει κατά σημείο προς τη συνάρτηση $f(z) = 0$ για $|z| < 1$ αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

ΛΥΣΗ

Ορίζουμε τους ορισμούς σύγκλισης κατά σημείο και ομοιόμορφης σύγκλισης, αντίστοιχα για τυχούσα f_n στο $A \subseteq \mathbb{C}$

- $f_n(z) \to f(z)$, όταν: $(\forall z \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0): |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$
- $f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $B \subset A \subseteq \mathbb{C}$, όταν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall z \in B)(\forall n \geq n_0): |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

Εάν $A = B$, η ακολουθία f_n συγκλίνει ομοιόμορφα προς τη συνάρτηση f. ($f_n \to f$)

Για την άσκηση:

$f_\nu(z) = |z|^\nu$, $|z| < 1$

Προφανώς, $\forall z : |z| < 1$: $|z|^\nu \xrightarrow{\nu \to \infty} 0$ αφού

για τυχόν $0 < \varepsilon < 1$, $\exists \nu_0$, $\forall \nu \geq \nu_0$: $|z|^\nu < \varepsilon$

όπου $|z|^\nu < \varepsilon \Rightarrow \log|z|^\nu < \log\varepsilon \Rightarrow \nu \log|z| < \log\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \nu > \dfrac{\log\varepsilon}{\log|z|} > 0$ (αφού $\log\varepsilon < 0$ και $\log|z| < 0$)

άρα $\nu_0 = \left[\dfrac{\log\varepsilon}{\log|z|}\right] + 1$.

Από την άλλη, έστω ότι f συγκλίνει ομοιόμορφα στο 0 (αφού $|z| < 1$ και στις δύο περιπτώσεις).

Δηλαδή, $\nu > \dfrac{\log\varepsilon}{\log|z|}$ ομοιόμορφα για όλα τα ν.

όμως παρατηρούμε ότι $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon, z)$ ενώ για να συγκλίνει ομοιόμορφα θα έπρεπε βάση των προϋποθέσεων στον παραπάνω ορισμό να είναι: $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ και μάλιστα όταν $|z| \to 1 \Rightarrow \log|z| \to 0 \Rightarrow \dfrac{\log\varepsilon}{\log|z|} \to -\infty$ πράγμα αδύνατο

__Άσκηση 21__

Εάν $|z| < 1$ νδο η σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-z)^\nu$ συγκλίνει προς τη συνάρτηση $\dfrac{1}{z+1}$.

__ΛΥΣΗ__

Το Θεώρημα των Cauchy-Hadamard λέει ότι:

Μια δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα σε κάθε τόπο που βρίσκεται στο εσωτερικό του δίσκου σύγκλισης της.

Θεωρούμε λοιπόν την ακολουθία συναρτήσεων $f_v(z)=(-z)^v$

Για κάθε $z\neq 0$ το ν-οστό μερικό άθροισμα της σειράς είναι το S_v ίσο με:

$f_0(z)+f_1(z)+\dots+f_v(z) = 1-z+z^2-z^3+\dots+(-z)^v$ και είναι η γεωμετρική πρόοδος:

$$S_v = \frac{(-z)^{v+1}-1}{-z-1} = \frac{(-z)^v\cdot z+1}{z+1}$$

Επειδή $|-z|=|z|<1$ τότε $\lim\limits_{v\to\infty}(-z)^v=0$ και άρα

$$\lim_{v\to\infty} S_v = \lim_{v\to\infty}\left(\frac{(-z)^v\cdot z+1}{z+1}\right) = \frac{1}{z+1}$$

Άρα, λοιπόν $\sum\limits_{v=0}^{\infty}(-z)^v = \dfrac{1}{z+1}$, $\forall z: |z|<1$

Άσκηση 22:

Να βρεθεί ο τόπος ομοιόμορφης σύγκλισης της δυναμοσειράς: $\sum\limits_{v=0}^{\infty}\dfrac{(z+1)^v}{3^v+2^v}$.

ΛΥΣΗ

Έστω $a_v=\dfrac{1}{3^v+2^v}$, τότε:

$$\lim_{v\to\infty}\left|\frac{a_{v+1}}{a_v}\right| = \lim_{v\to\infty}\frac{3^{v+1}+2^{v+1}}{3^v+2^v} = \lim_{v\to\infty}\frac{3+2\left(\frac{2}{3}\right)^v}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^v} = 3.$$

Άρα, η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $R=\frac{1}{3}>0$ και δίσκο σύγκλισης: $|z+1|<\frac{1}{3}$.

Άρα, από το θεώρημα των Cauchy-Hadamard η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα (και απόλυτα) σε κάθε δίσκο $|z+1|\leq r$ όπου $r<\frac{1}{3}=R$.

(συμπαγές $\subseteq$ δίσκου σύγκλισης)

Άσκηση 23

Να αποδείξετε ότι η σειρά Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n$, συγκλίνει σε κάθε σημείο z, που ανήκει στην ανοικτή δακτυλική περιοχή $\Delta(a; r_1, r_2)$, όπου $r_1 := \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|}$ και $r_2 := \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}}$ όταν $r_1 < r_2$.

Απόδειξη

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n := \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n,$$ συγκλίνει όταν

$\sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-a)^{-n}$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ συγκλίνουν.

Η πρώτη συγκλίνει όταν (από κρ. ν-οστής ρίζας Cauchy)

$$\limsup \sqrt[n]{|b_{-n}(z-a)^{-n}|} < 1 \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|} \cdot \frac{1}{|z-a|} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z-a| > \limsup \sqrt[n]{|b_{-n}|} =: r_1$$

Η δεύτερη δυναμοσειρά εξ ορισμού της συγκλίνει στο δίσκο $B(a, r_2)$ όπου $r_2 := \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}}$ η ακτίνα σύγκλισής της.

Άρα, η δεύτερη δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $z \in B(a, r_2) \Rightarrow |z-a| < r_2$.

Συναληθευτικά λοιπόν η γενική σειρά Laurent συγκλίνει σε καθε z : $r_1 < |z-a| < r_2 \Rightarrow z \in \Delta(a; r_1, r_2)$ με $r_1 < r_2$.

Άσκηση 24

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

i) $e^z = 1$, ii) $\cos z = 0$, iii) $\sinh z = i$

ΛΥΣΗ

i) Έστω $z = x + iy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$e^z = 1 \Rightarrow e^{x+iy} = 1 \Rightarrow e^x \cdot e^{iy} = 1 \Rightarrow e^x \cdot \cos y + i e^x \cdot \sin y = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^x \cdot \cos y = 1$ και $e^x \cdot \sin y = 0$, όπου από

τη δεύτερη $e^x \cdot \sin y = 0$ έπεται ότι: $\sin y = 0$

το οποίο αληθεύει όταν $y = k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Αντικαθιστώντας στην άλλη συνθήκη, παίρνουμε:

$e^x \cdot \cos(k\pi) = 1$

- Αν $k = 2\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^x \cdot \cos(k\pi) = -e^x = 1$ αδύνατη
- Αν $k = 2\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^x \cdot \cos(k\pi) = e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Άρα, η εξίσωση $e^z = 1$ έχει λύση τους μιγαδικούς

$z = x + yi = k\pi i = 2\lambda\pi i$, $\forall \lambda \in \mathbb{Z}$

ii) $\cos z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{2i(x+iy)} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2ix - 2y} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2xi} \cdot e^{-2y} = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-2y} \cdot (\cos(2x) + i\sin(2x)) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-2y} \cdot \cos(2x) + i e^{-2y} \cdot \sin(2x) = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-2y} \cdot \cos(2x) = -1$ και $e^{-2y} \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = -e^{2y}$ και $\sin(2x) = 0$

όπου από τη δεύτερη έπεται ότι: $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

Αντικαθιστώντας στην άλλη συνθήκη, παίρνουμε:

$\cos(\cancel{2}\frac{k\pi}{\cancel{2}}) = -e^{2y} \Leftrightarrow \cos(k\pi) = -e^{2y} \Leftrightarrow (-1)^k = -e^{2y}$

Προφανώς αν k άρτιος αδύνατη.

Άρα, εάν k περιττός (δηλ. $k = 2\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$), έχουμε

$-1 = -e^{2y} \Leftrightarrow 1 = e^{2y} \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Δηλαδή, οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί

$z = \frac{(2\lambda+1)\pi}{2}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

iii) Μια υπόδειξη δουλέψτε με την ισότητα: $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$.

Σχόλιο: Να βρεθεί ο αριθμός π^i.

Απ:

$$\pi^i = e^{i\log\pi} \quad (1)$$

όπου, $\log\pi = \log|\pi| + i\,\cancel{\arg(\pi)}^{\,0} = \log\pi$

Άρα, η (1) γίνεται:

$$\pi^i = e^{i\log\pi} = \cos(\log\pi) + i\sin(\log\pi)$$

Άσκηση 25

i) Να επιλυθεί η εξίσωση $\sin(z-i)=1$.

ii) Ποια τα σημεία του $\mathbb{C}$, στα οποία η $f(z)=\bar{z}+\mathrm{Log}(z\bar{z}+\bar{z})$ είναι συνεχής;

ΛΥΣΗ

i) Θεωρώ $w := z-i \rightarrow \sin w = 1 \Rightarrow \dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{2iw} - 2ie^{iw} - 1 = 0 \xrightarrow{t=e^{iw}} t^2 - 2it - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=-4+4=0}$$

$$\Rightarrow t = \frac{2i}{2} = i \Rightarrow e^{iw} = i \Rightarrow iw = \log(i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow iw = \cancel{\log|i|}^{\,0} + i\arg(i) = i\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow w = 2k\pi + \frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Τουτέστιν, $z-i=w \Rightarrow z = w+i = \left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)+i,\ k\in\mathbb{Z}$

ii) Εφόσον $\mathrm{Arg}(w)$ όχι συνεχής για εκείνα τα w, όπου $w+|w|=0$ ~~τότε~~

Εδώ, αφού $f(z)=\bar{z}+\mathrm{Log}(z\bar{z}+\bar{z}) =$

$= \bar{z} + \mathrm{Log}|z\bar{z}+\bar{z}| + \mathrm{Arg}(z\bar{z}+\bar{z})$, τότε αρκεί

$z\bar{z}+\bar{z} + |z\bar{z}+\bar{z}| = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+x-iy+|x^2+y^2+x-iy|=0$

$\Rightarrow y=0$ και $x^2+x+|x^2+x|=0 \Rightarrow x^2+x = -|x^2+x| \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=0$ και $\boxed{-1\le x\le 0}$. Άρα, f συνεχής παντού στο $\mathbb{C}$

Εντός από τον πραγματικό άξονα με τιμές: $x \in [-1,0]$.

Άσκηση 26

i) Να υπολογιστεί το όριο (αν υπάρχει)
$\lim_{n\to\infty} \left(i^{i} \cdot (2i)^{2i} (3i)^{3i} \cdots (ni)^{ni} \right)$, όπου α^{b} βασικός κλάδος της δύναμης $\{\alpha^{b}\}$

ii) Να λυθεί η εξίσωση:
$(2i)^{z} = 1+i$

ΛΥΣΗ

i) $(ni)^{ni} = e^{ni \cdot Log(ni)} = e^{ni(\log n + i\,Arg(ni))} =$

$= e^{ni(\log n + i\frac{\pi}{2})} = e^{(-n\frac{\pi}{2} + in\log n)}$

με μέτρο $|(ni)^{ni}| = e^{-n\frac{\pi}{2}}$

Επομένως, $|i^{i}(2i)^{2i} \cdot (3i)^{3i} \cdots (ni)^{ni}| = e^{-\overbrace{(1+2+3+\dots+n)}^{=\frac{n(n+1)}{2}}\frac{\pi}{2}}$
το οποίο τείνει προς το 0 όταν $n\to\infty$
Και άρα $\lim_{n\to\infty} (i^{i} \cdot (2i)^{2i} \cdot (3i)^{3i} \cdots (ni)^{ni}) = 0$

ii) $(2i)^{z} = 1+i \Leftrightarrow e^{z\log(2i)} = 1+i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{z(\log 2 + i\arg(2i))} = 1+i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{z(\log 2 + i(2k\pi + \frac{\pi}{2}))} = 1+i, \ \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z(\log 2 + i(2k\pi + \frac{\pi}{2})) = \log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\arg(1+i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z(\log 2 + i(2k\pi + \frac{\pi}{2})) = \frac{1}{2}\log 2 + (2\lambda\pi + \frac{\pi}{4})i, \ \forall \lambda \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{\frac{1}{2}\log 2 + (2\lambda\pi + \frac{\pi}{4})i}{\log 2 + (2k\pi + \frac{\pi}{2})i}, \ \forall k, \lambda \in \mathbb{Z}$.

Ασκηση 27

Να αποδείξετε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω σε μία κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη είναι ανεξάρτητο από την παραμετρική παράσταση της καμπύλης

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η καμπύλη είναι διαφορίσιμη παντού. Έστω λοιπόν αυτή (γ) και παραμετρική παράσταση αυτής : $z=z(t)$, $\forall t\in[a,\beta]$.

Θεωρούμε επίσης και την $t=\psi(s)$, $s\in[a',\beta']$ να είναι μία αναπαραμέτρηση της γ. (δηλ. 1-1, συνεχής και $\psi(\alpha')=\alpha$ και $\psi(\beta')=\beta$) η οποία είναι επίσης διαφορίσιμη

Θεωρούμε $f:\gamma\to\mathbb{C}$.

Τότε,

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_a^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt \quad (1)$$

Επιπλέον η αναπαραμέτρηση: $z_*(s)=z(\psi(s))$, για κάθε $s\in[\alpha',\beta']$ και έχει ολοκλήρωμα:

$$\int_\gamma f(z_*)\,dz_*=\int_{\alpha'}^{\beta'} f(z_*(s))\,z_*'(s)\,ds \quad (2)$$

Προκύπτει ισότητα μεταξύ των (1) και (2) αφού

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f(z_*(s))\,z_*'(s)\,ds=\int_{\alpha'}^{\beta'} f(z(\psi(s)))\cdot z'(\psi(s))\,\psi'(s)\,ds=$$

$$=\int_{\alpha'}^{\beta'} f(z(\psi(s)))\cdot z'(\psi(s))\,d(\psi(s))=$$

$$=\int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt.$$

Άσκηση 28:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \left(z^2 + 2\sqrt[4]{z}\right) dz$$

όπου γ: άνω τμήμα μοναδιαίου κύκλου με θετική φορά και όπου $\sqrt[4]{z}$ ο κλάδος της $4^{ης}$ ρίζας του z έτσι ώστε $\sqrt[4]{1} = -i$

ΛΥΣΗ

$$\gamma : z(t) = \underbrace{\cos t + i\sin t}_{= e^{it}}, \quad t \in [0,\pi]$$

$$\sqrt[4]{z(t)}_k = \begin{cases} \cos\frac{t}{4} + i\sin\frac{t}{4} = e^{i\frac{t}{4}}, & k=0 \\ \cos\left(\frac{t+2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{t+2\pi}{4}\right) = e^{i\left(\frac{t+2\pi}{4}\right)}, & k=1 \\ \cos\left(\frac{t+4\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{t+4\pi}{4}\right) = e^{i\left(\frac{t+4\pi}{4}\right)}, & k=2 \\ \cos\left(\frac{t+8\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{t+6\pi}{4}\right) = e^{i\left(\frac{t+6\pi}{4}\right)}, & k=3 \end{cases}$$

Και δεχόμαστε εκείνο τον κλάδο έτσι ώστε $\sqrt[4]{1} = -i$

Για $t=0$,

- Ο πρώτος: $\sqrt[4]{z(0)} = \sqrt[4]{1} = -i = e^{i\cdot 0} = 1$ αδύνατο
- Ο δεύτερος: $\sqrt[4]{z(0)} = \sqrt[4]{1} = -i = e^{i\pi/2} = i$ αδύνατο
- Ο τρίτος: $\sqrt[4]{z(0)} = \sqrt[4]{1} = -i = e^{i\pi} = -1$ αδύνατο
- Ο τέταρτος: $\sqrt[4]{z(0)} = \sqrt[4]{1} = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$ ισχύει ←

Επομένως, όταν αληθεύει ο $4^{ος}$ κλάδος έχουμε:

$$\int_\gamma \left(z^2 + 2\sqrt[4]{z}\right) dz = \int_0^\pi \left((z(t))^2 + 2\sqrt[4]{z(t)}\right) dt =$$

$$= \int_0^\pi \left(e^{i2t} + 2e^{i\left(\frac{t+6\pi}{4}\right)}\right)\cdot\left(ie^{it}\right) dt =$$

$$= \int_0^\pi \left(ie^{i3t} + 2ie^{i\left(\frac{5t+6\pi}{4}\right)}\right) dt =$$

$$= \int_0^\pi ie^{i3t}\, dt + 2i\int_0^\pi e^{\frac{5t}{4}i + \frac{3\pi}{2}i}\, dt =$$

$$= i\left.\frac{e^{i3t}}{3}\right|_0^\pi + 2\cdot\frac{4}{5}\left.e^{\frac{5ti}{4}}\right|_0^\pi = \underbrace{i\frac{\overbrace{e^{i3\pi}}^{-1}}{3} - i\frac{1}{3}}_{\frac{-4i}{3}} + \underbrace{\frac{8}{5}e^{\frac{5\pi i}{4}}}_{+\frac{8}{5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} - \frac{8}{5} =$$

Άσκηση 29:

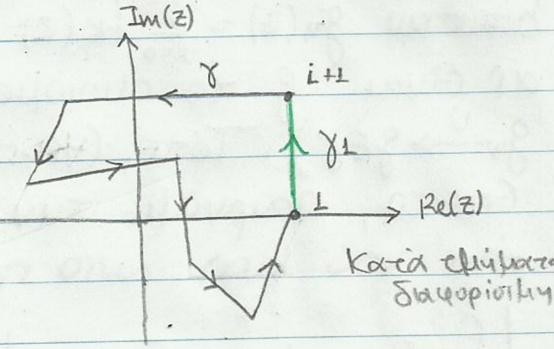
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{Log z}{z}\, dz$$

κατά μήκος της γ, όπου γ μία πολυγωνική γραμμή με αρχή το $i+1$ και πέρας το 1

ΛΥΣΗ

ΠΙΘΑΝΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ



Έστω $f(z) = \frac{Log z}{z}$ όπου

$z+|z|=0 \Rightarrow x+iy+|x+iy|=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x+x^2+y^2+iy=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x+x^2+y^2=0$ και $y=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x+x^2=0$ και $y=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=0$ ή $x=-1$ και $y=0$

f συνεχής στο $\mathbb{C}\setminus\{-1,0\}$.

Η f έχει αρχική συνάρτηση την $F(z)=\frac{Log^2 z}{2}$

Στόχος μου είναι η εφαρμογή του Θεωρήματος του Newton και Leibnitz.

Ενώνουμε με μία ευθεία γραμμή το 1 με το $i+1$ και λαμβάνουμε την κλειστή καμπύλη: $\Gamma = \gamma \oplus \gamma_1$.

και τότε $\int_\Gamma f(z)\,dz=0 \Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = -\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ (1)

Επομένως,

$$\int_\gamma \frac{Log z}{z}\,dz \overset{(1)}{=} -\int_{\gamma_1} \frac{Log z}{z}\,dz \quad (2)$$

Όμως η γ_1 έχει παραμέτρηση $z(t)=1+iy(t)$, $t\in[0,1]$

Επομένως, η (2) είναι (από Newton-Leibnitz)

$$-\int_{\gamma_1} \frac{Log z}{z}\,dz = -\frac{Log^2(1+i\cdot 1)}{2} + \cancelto{0}{\frac{Log^2(1+i\cdot 0)}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(log\sqrt{2} + iArg(1+i)\right) = -\frac{1}{2}\left(log\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}\right).$$

Άσκηση 30:

Εάν $\sum_0^\infty f_n$ είναι μία σειρά μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων και συνεχών πάνω σε μία κατά τμήματα διαφορίσιμη καμπύλη γ και η οποία σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα πάνω στη γ, τότε να αποδείξτε ότι:

$$\int_\gamma \sum_0^\infty f_n(z)\,dz = \sum_0^\infty \int_\gamma f_n(z)\,dz$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστωσαν $g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$ και $G_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \int_\gamma f_k(z)\,dz$ και ας είναι g το ομοιόμορφο όριο της g_n πάνω στη γ (δηλαδή $g_n \xrightarrow{U} g \in \gamma$). Τότε, $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0)\ \forall n \geq n_0$ και $z \in \gamma \Rightarrow |g_n(z)-g(z)| < \varepsilon/\mu(\gamma)$

Έπειτα, παίρνουμε την απόλυτη τιμή της διαφοράς, έχουμε στο νού μας αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε:

$$\left| \int_\gamma g(z)\,dz - G_n(z) \right| = \left| \int_\gamma g(z)\,dz - \sum_{k=0}^{n} \int_\gamma f_k(z)\,dz \right| =$$

$$= \left| \int_\gamma g(z)\,dz - \int_\gamma \sum_{k=0}^{n} f_k(z)\,dz \right| = \left| \int_\gamma (g(z)-g_n(z))\,dz \right| \quad (1)$$

όμως, $|g_n(z)-g(z)| < \frac{\varepsilon}{\mu(\gamma)}$, άρα στην (1)

μήκος καμπύλης γ

$$\left| \int_\gamma (g(z)-g_n(z))\,dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{\cancel{\mu(\gamma)}} \cancel{\mu(\gamma)} = \varepsilon$$

Άρα, από το τελευταίο έπεται ότι

$$\int_\gamma (g(z)-g_n(z))\,dz \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

Άσκηση 31

Εάν γ είναι θετικά προσανατολισμένος κύκλος $K(a,r)$, τότε για κάθε $z \in B(a,r)$, ισχύει:

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$$

(Υποδ: Υπολογίστε πρώτα το $\int_\gamma (z-a)^{-1} dz =;$)

APODEIXH

Έστω γ κύκλος με παραμετρική παράσταση:

$z(s) = a + re^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$

Τότε,

$$\int_\gamma (z-a)^{-1} dz = \int_\gamma \frac{1}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(s)-a} \cdot z'(s) ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{re^{is}}} \cancel{r} i \cancel{e^{is}} ds = \int_0^{2\pi} i \, ds = 2\pi i$$

Ας είναι τώρα $z \in B(a,r)$.

Τότε $\forall t \in [0,1]$ το σημείο $\{(1-t)a + tz\} \in B(a,r)$

διότι $|(1-t)a + tz - a| = t|a-z| \overset{t\in[0,1]}{<} r$

Επομένως η συνάρτηση

$$\varphi(t,w) = \frac{1}{w-a+t(a-z)}$$ είναι καλά ορισμένη και

παραγωγίσιμη ως προς το $w \in \gamma$ και $t \in [0,1]$ με συνεχή παράγωγο.

Θεωρούμε έπειτα

$$g(t) = \int_\gamma \varphi(t,w) dw = \int_\gamma \frac{dw}{w-a+t(a-z)}, \quad t \in [0,1]$$

Αφού, η $\varphi_w(t,w)$ υπάρχει και είναι συνεχής

Τότε

$$g'(t) = \int_\gamma \frac{(z-a)}{(w-a+t(a-z))^2} dw$$

Όπου για $t =$ σταθ, η $F(w) = \dfrac{z-a}{w-a+t(a-z)}$ έχει

Παράγωγο

$$F'(w) = \frac{z-a}{(w-a+t(\alpha-z))^2}$$

Οποτε, απο Θεώρημα Newton-Liebnitz : $g'(t)=0, t\in[0,1]$

Αρα, βάση του αρχικου που αποδείξαμε

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = g(1) = g(0) = \int_\gamma \frac{dw}{w-\alpha} = 2\pi i$$

Άσκηση 32

Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor με κέντρο το $z_0=-1$ η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z^2-z}$ και να βρεθεί ο τοπος σύγκλισης συν.

ΛΥΣΗ

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} = g(z) - h(z) \quad , \forall z\neq 0,1$$

Η απόσταση του $z_0=-1$ από το σύνορο του τόπου $\tau = \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ στον οποίο ορίζεται η f είναι το:

$\inf\{|-1-0|, |-1-1|\} = \inf\{1,2\} = 1$

Αρα, η f έχει την δυνατότητα να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor στο δίσκο $|z+1|<1$ (ή $B(1,1)$).

Τώρα, $g(z) = \frac{1}{z-1}$, $g'(z) = -\frac{1}{(z-1)^2}$, $g''(z) = \frac{2}{(z-1)^3}$,

$g'''(z) = \frac{-6}{(z-1)^4}$, ..., $g^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(z-1)^{n+1}}$

Επομένως, οπου $z=-1$ παίρναμε:

$g(-1) = -\frac{1}{2}$, $g'(-1) = -\frac{1}{4}$, $g''(-1) = -\frac{1}{4}$, ..., $g^{(n)}(-1) = -\frac{n!}{2^{n+1}}$

Έτσι, αναπτύσσαμε τη g μέσω Taylor

$$g(z) = g(-1) + g'(-1)(z+1) + g''(-1)\cdot\frac{1}{2}(z+1)^2 + \ldots + g^{(n)}(-1)\frac{1}{n!}(z+1)^n + \ldots$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z+1) - \frac{1}{8}(z+1)^2 + \ldots - \frac{\cancel{n!}(z+1)^n}{\cancel{n!}\,2^{n+1}} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n.$$

$h(z)=\frac{1}{z}$, $h'(z)=-\frac{1}{z^2}$, $h''(z)=\frac{2}{z^3}$, ..., $h^{(n)}(z)=\frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}$

$h(-1)=-1$, $h'(-1)=-1$, $h''(-1)=-2$, ..., $h^{(n)}(-1)=\frac{(-1)^n n!}{(-1)^{n+1}}=-n!$

Επομένως, $h(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n$

Άρα,

$$f(z)=g(z)-h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z+1)^n$$

Άσκηση 33

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\oint_\gamma \frac{3z^2-2z+1}{(z-1)(z^2+1)}\,dz$$, όπου γ: κύκλος εξίσωσης

α) $|z|=\frac{1}{2}$, β) $|z+\frac{3i}{2}|=1$, γ) $|z|=2$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $f(z)=\frac{3z^2-2z+1}{(z-1)(z^2+1)}$ είναι ολόμορφη στον

τόπο $\mathcal{T}=\mathbb{C}\setminus\{1,\pm i\}$. Πρόκειται για ρητή συνάρτηση:

$$\frac{3z^2-2z+1}{(z-1)(z^2+1)}=\frac{\alpha}{z-1}+\frac{\beta}{z-i}+\frac{\gamma}{z+i} \overset{z\in\mathcal{T}}{\Leftrightarrow}$$

$$3z^2-2z+1=\alpha(z^2+1)+\beta(z-1)(z+i)+\gamma(z-1)(z-i) \Leftrightarrow$$

$$3z^2-2z+1=(\alpha+\beta+\gamma)z^2+(\beta i-\beta-\gamma i-\gamma)z+(\alpha-\beta i+\gamma i) \Leftrightarrow$$

Άρα, $\alpha+\beta+\gamma=3$, $\beta i-\beta-\gamma i-\gamma=-2$ και $\alpha-\beta i+\gamma i=1 \Leftrightarrow$

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\beta+\gamma=2$ και $\beta-\gamma=0$, $\boxed{\alpha=1} \Leftrightarrow$

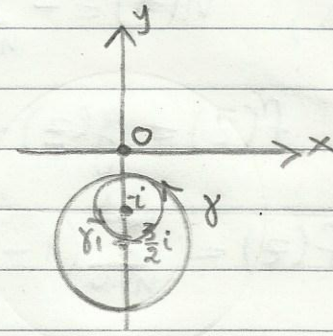
$\beta+\gamma=2$ και $\beta-\gamma=0 \Leftrightarrow \boxed{\beta=\gamma=1}$

Άρα, το I αναλύεται ως εξής:

$$I=\oint_\gamma \frac{1}{z-1}\,dz+\oint_\gamma \frac{1}{z-i}\,dz+\oint_\gamma \frac{1}{z+i}\,dz \quad , \forall z\in\mathcal{T}.$$

α) Τα σημεία $1, -i$ και $i \notin \tau$
Επομένως από το Θεώρημα Cauchy
$I = 0 + 0 + 0 = 0$

β) Το σημείο $-i$ ανήκει στο εσωτερικό του κύκλου γ
Για αυτό το σκοπό θεωρούμε (γ_1) κύκλο με κέντρο το $-i$ και ακτίνα $\frac{1}{2}$. Έτσι, η f ολόμορφη στον μή απλά συνεκτικό τόπο μεταξύ των προσανατολισμένων κατά τη θετική φορά κύκλων γ και γ_1. Τότε γνωρίζουμε ότι:



$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z+i} \quad ①$$

$(\gamma_1): z(t) = -i + \frac{1}{2}e^{it}, \ \forall t \in [0, 2\pi]$

Τότε, ①: $\oint_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(t)+i} z'(t)\,dt =$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{\frac{1}{2}e^{it}}} \cancel{\frac{1}{2}e^{it}} \cdot i\,dt = 2\pi i$$

Τα σημεία, i και 1 είναι εξωτερικά του γ
Επομένως, σε αυτή την περίπτωση
$I = 0 + 0 + 2\pi i = 2\pi i$

γ) Αφήνεται ως άσκηση (Αποτέλ: $I = 6\pi i$)

Άσκηση 34

Αν γ: κύκλος εξίσωσης $|z| = 2$ τότε νδο $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{xz}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i \cdot \eta\mu x$$

ΛΥΣΗ

Θέτω $g(z) = \dfrac{e^{xz}}{z^2+1}$, ορισμένη στον τόπο $\tau = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$

τα σημεια i και $-i$ ανηκουν στο εσωτερικο του γ.
Επισης,

$$\oint_\gamma g(z)dz = \oint_\gamma \frac{-i/2}{z-i}dz + \oint \frac{i/2}{z+i}dz =$$

$$= -\frac{i}{2}\int_\gamma \frac{1}{z-i}dz + \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{1}{z+i}dz \quad (1)$$

Θεωρουμε τωρα $f(z)=e^{xy}$ ολομορφη στο καλυμμα του κυκλου γ.
Τοτε απο τον τυπο του Cauchy, εχουμε:

$$\oint_\gamma \frac{e^{xy}}{z-i}dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-i}dz = 2\pi i \cdot f(i) = 2\pi i\, e^{xi}$$

$$\oint_\gamma \frac{e^{xy}}{z+i}dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-i}dz = 2\pi i \cdot f(-i) = 2\pi i \cdot e^{-xi}$$

Τουτεστιν, στη σχεση (1) εχουμε:

$$\oint_\gamma g(z)dz = -\frac{i}{2}(2\pi i\, e^{xi}) + \frac{i}{2}(2\pi i\, e^{-xi}) =$$

$$= -\frac{i}{2}(2\pi i(\sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x)) + \frac{i}{2}2\pi i(\sigma\upsilon\nu x - i\eta\mu x) =$$

$$= 2\pi i \cdot \eta\mu x.$$

Ασκηση 35

Να υπολογισθει το ολοκληρωμα

$$\oint_\gamma \frac{e^{-iz}}{(z+i)^4}dz$$ οπου γ κυκλος κεντρου $O(0,0)$ και ακτινας ισης με $\rho=2$.

ΛΥΣΗ

Ισχυει $$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

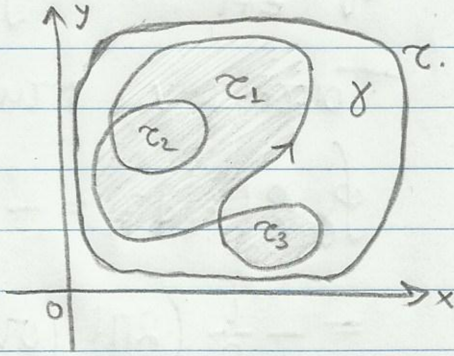
Θεωρώ $f(z)=e^{-iz}$, $z_0=-i$ ανήκει στο εσωτερικό της γ και f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$.
Άρα, για $n=3$ έχουμε:

$$\oint_\gamma \frac{e^{-iz}}{(z+i)^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!}\cdot f^{(3)}(i) = \frac{\pi i}{3}\cdot(-ie) = \frac{\pi\cdot e}{3}.$$

όπου, $f'(z)=-ie^{-iz}$, $f''(z)=e^{-iz}$, $f^{(3)}(z)=-ie^{-iz}$
άρα $f^{(3)}(i)=-i\cdot e^{-i^2}=-i\cdot e$.

<u>Άσκηση 36</u>.
Ο δείκτης στροφής $I(\gamma,z)$ κλειστής καμπύλης γ ως προς ένα σημείο $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma$ είναι ακέραιος αριθμός.

<u>ΛΥΣΗ</u>.
Η γ ορίζει κάποιους τόπους στο $\mathbb{C}$, η ένωση των οποίων είναι το σύνολο $\mathbb{C}\setminus\gamma$ (βλέπε σχήμα).



Για απλότητα των πράξεων θεωρούμε ότι η καμπύλη είναι λεία και $\gamma(t)$, $t\in[0,1]$ η παραμέτρηση της γ.
γ κλειστή $\Rightarrow \gamma(0)=\gamma(1)$
Επίσης,

$$I(\gamma,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt.$$

Θεωρούμε στη συνέχεια τη $g:[0,1]\to\mathbb{C}$ με τύπο

$$g(x)=\int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt \Rightarrow g'(x)=\frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'(x)(\gamma(x)-z)=\gamma'(x)\Leftrightarrow g'(x)(\gamma(x)-z)-\gamma'(x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left((\gamma(x)-z)e^{-g(x)}\right)=0\Leftrightarrow(\gamma(x)-z)e^{-g(x)}=c:\text{σταθ}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{(\gamma(1)-z)}\,e^{-g(1)}=(\gamma(0)-z)\,\cancel{e^{-g(0)}}^{\,1}=\cancel{\gamma(0)-z}\overset{\gamma(0)=\gamma(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow e^{-g(1)}=1\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \; -g(1) = \log 1 = \cancel{\log|1|}^{0} + i\arg g(1) - i2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$ ①

Άλλα, $I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot g(1) \overset{①}{=} -\frac{1}{2\pi i} \cancel{2\pi i} k = -k \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 37

Έστωσαν γ_1 και γ_2 κλειστές καμπύλες με παραμετρήσεις $z_1(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ και $z_2(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ αντίστοιχα και τ/ω $|z_1(t) - z_2(t)| < |z_2(t)|$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Τότε ισχύει:

$I(\gamma_1, 0) = I(\gamma_2, 0)$

ΛΥΣΗ

Προφανώς $z_2(t) \neq 0$, $\forall t$ (αφού αν $z_2(t) = 0$ τότε $|z_1(t) - 0| = |z_1(t)| < 0$ αδύνατο)

Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$z(t) := \frac{z_1(t)}{z_2(t)}, \; \forall t \in [\alpha, \beta]$$

Τότε παίρνουμε: $|z(t) - 1| < 1 \Rightarrow$ Η $\gamma: z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ είναι μία κατά τμήματα διαφορίσιμη συνάρτηση στο δίσκο $B(1,1)$.

Παρατηρούμε ότι $0 \notin Ext(\gamma)$ (το 0 εξωτερικό της γ) και άρα από τον ορισμό του δείκτη στροφής: $I(\gamma, 0) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{z'(t)}{z(t)} dt = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \left(\frac{z_1'(t)}{z_1(t)} - \frac{z_2'(t)}{z_2(t)} \right) dt = 0 \Rightarrow$$

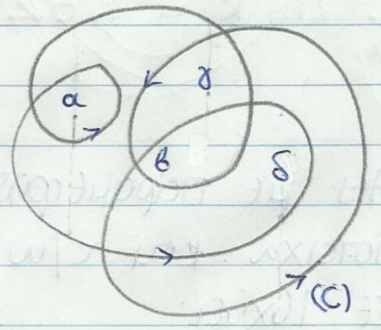
$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{z_1'(t)}{z_1(t)} - \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{z_2'(t)}{z_2(t)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(\gamma_1, 0) - I(\gamma_2, 0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(\gamma_1, 0) = I(\gamma_2, 0).$$

Άσκηση 38.

Ποιος ο δείκτης στροφής των σημείων στο εσωτερικό της (C).



Απάντηση

$I(c,\alpha)=2$

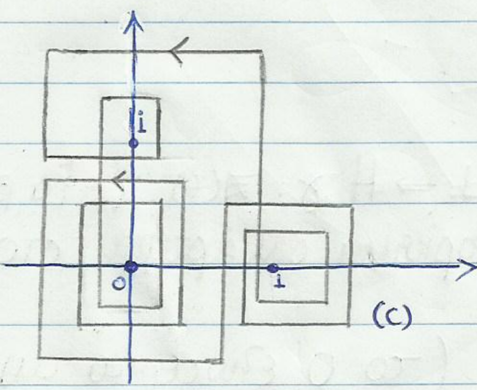
$I(c,\beta)=3$

$I(c,\gamma)=2$

$I(c,\delta)=2.$

Άσκηση 39

Ποιος ο δείκτης στροφής των σημείων στο εσωτερικό της (C)
Συγκεκριμένα για τα σημεία $0, 1, i$ όπως στο σχήμα.



Απάντηση

$I(c,1)=-2$

$I(c,i)=2$

$I(c,0)=3$

Άσκηση 40

Αν f μια συνάρτηση ολόμορφη σε ένα τόπο τ, τότε να δείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο $w\in\tau$: $f^{(n)}(w)=0$, $\forall n$ εκτός αν αυτή είναι εκ ταυτότητος μηδέν.

ΛΥΣΗ

ΛΗΜΜΑ: Εάν $A\subseteq\tau$ με A ανοιχτό-κλειστό ταυτόχρονα τότε το $A=\tau$.

Αποδ

Έστω $A\neq\tau \Rightarrow \tau - A\neq\emptyset \Rightarrow \tau\cap A^c\neq\emptyset$

Επομένως, $\tau = A\cup(\tau\cap A^c)$ πράγμα που αντίκειται στη συνεκτικότητα του τ. (διότι θα έπρεπε να μην υπάρχει ανοιχτή κάλυψη)

Ετσι λοιπον στην ασκηση μας, υποθετουμε ότι υπάρχει σημείο $w \in \mathbb{C}$: $f^{(n)}(w)=0$, για αυτο το σκοπό θεωρούμε το συνολο $A=\{w \in \mathbb{C} : f^{(n)}(w)=0,\ \forall n\} \neq \emptyset$ με σκόπο να αποδείξουμε ότι είναι συγχρόνως ανοιχτο και κλειστο. Εστω τυχον $w \in A$ για το οποίο μπορουμε να βρουμε εναν ανοιχτό δίσκο $B(w,r)$ στον $\mathbb{C}$, μέσα στον οποίο η f αναπτυσσεται σε σειρά Taylor κέντρου w και μορφής : $f(z)=\sum_{0}^{\infty} \alpha_\nu (z-w)^n$ όπου $\alpha_\nu = \frac{f^{(n)}(w)}{n!}$ $\forall n=0,1,2,\ldots$. Αλλά, απο την υπόθεση $f^{(n)}(w)=0$, $\forall w \in A$ Επομένως, $\alpha_\nu = 0 \Rightarrow f(z)=0$, $\forall z \in B(w,r)$. Αρα, ο δίσκος $B(a,r) \subseteq A \Rightarrow A$ ανοιχτό.

Για την κλειστότητα αρκεί να θυμίσουμε ότι

A κλειστο $\Leftrightarrow (\forall w_\nu \in A) : w_\nu \to w$ όπου $w \in A$

Επομένως, εδώ αν θεωρήσουμε τυχουσα $w_\nu \in A$ συγκλίνουσα προς το w τότε ισχυει ότι:

$f^{(n)}(w) \overset{\text{συνεχ}}{=} \lim\limits_{\nu} f^{(n)}(w_k) = 0 \in A \Rightarrow A$ κλειστο

Συνεπώς από τα δύο παραπάνω $A=\mathbb{C}$

<u>Ασκηση 41</u> (Δείτε πρώτα την ασκηση 42)

i) Να εξεταστεί αν για καθε μιγαδικο z ισχύει $|\sigma\upsilon\nu z| \leq 1$

ii) Να αποδείξετε ότι κάθε αρμονική και φραγμένη πραγματική συνάρτηση $u(x,y)$ στον $\mathbb{R}^2$, είναι σταθερή

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) Εστω ότι ισχύει $\forall z : |\sigma\upsilon\nu z| \leq 1$

Τοτε η ολόμορφη συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu z$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$ και επομένως απο το Θεώρημα Liouville είναι σταθερή, Πράγμα άτοπο.

ii) Αν $v(x,y)$ συζυγής αρμονική της $u(x,y)$, τότε η συνάρτηση $g(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ Επομένως και η συνάρτηση : $f(z)=\exp(g(z))$ ολόμορφη στο $\mathbb{C}$. Εφόσον, τώρα $|u(x,y)| \leq M$ τότε

$|f(z)| = |\exp[u(x,y)] \cdot \exp[iv(x,y)]| = e^{u(x,y)} \cdot (\sigma\upsilon\nu v + i\eta\mu v) =$

$= e^{u(x,y)}\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 v + \eta\mu^2 v} = e^{u(x,y)} \leq e^M \Rightarrow f$ φραγμένη

Άρα, από Θεώρημα Liouville η f σταθ στο $\mathbb{C}$ και άρα $u(x,y) = Re(f(z)) =$ σταθ στο $\mathbb{R}^2$

Άσκηση 42 (Εκτιμήσεις Cauchy)

Εξετάστε εάν υπάρχει $f: B(0,1) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τ/ω: $|f^{(n)}(0)| \geq (n!)^2 \ \forall n \in \mathbb{N}$

ΛΥΣΗ

Από τις εκτιμήσεις Cauchy γνωρίζουμε ότι για μία ολόμορφη συνάρτηση f στο δίσκο $B(a,r)$ και συνεχή στο $\overline{B(a,r)}$ ισχύει:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{w \in \partial B(a,r)} |f(w)|$$

Μπορούμε να πάρουμε κάθε r: $0<r<1$

Οπότε εδώ, για $a=0$ και $r=\frac{1}{2}$ παίρνουμε:

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \max_{|w|=\frac{1}{2}} |f(w)| \overset{\text{Υποθ.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$(n!)^2 \leq |f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \max_{|w|=\frac{1}{2}} |f(w)| \Leftrightarrow$$

$$n! \leq 2^n \cdot \max_{|w|=\frac{1}{2}} |f(w)| \Leftrightarrow \frac{n!}{2^n} \leq \max_{|w|=\frac{1}{2}} |f(w)| \quad \text{αδύνατο}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n} = \infty\right)$$

Άσκηση 43:

i) Να αποδειχθεί το πρώτο Θεώρημα του Liouville.

ii) Αν $f(z)$ και $g(z)$ δύο ακέραιες συναρτήσεις ορισμένες στο μιγαδικό επίπεδο τέτοιες ώστε: $|f(z)| < |g(z)|, \forall z \in \mathbb{C}$ τότε να αποδείξετε ότι ισχύει $f(0)g(z) = f(z)\cdot g(0), \forall z \in \mathbb{C}$

iii) Να αποδείξετε ότι η μόνη ακέραια (δηλ. ολόμορφη στο $\mathbb{C}$) συνάρτηση f: $|f(z)-i| < |f(z)| e^{Re(z)}$ είναι η $f(z)=i$

ΛΥΣΗ

i) Έστω $M : |f(z)| \leq M \ , \ \forall z \in \mathbb{C}$
Απο τις εκτιμήσεις Cauchy για $n=1$ παίρνουμε
$$|f'(a)| \leq \frac{1}{r} \max_{|z-a|=r} |f(z)| \leq \frac{1}{r} \cdot M \ , \ \forall z \in \mathbb{C} \ .$$

Εφόσον το r μπορεί να λάβει όσο μεγάλες τιμές θέλει παίρνοντας τα όρια όταν $r \to \infty$, έχουμε ότι:
$f'(z) = 0 \ , \ \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f$ σταθερή $, \forall z \in \mathbb{C}$.

ii) Προφανώς $g(z) \neq 0, \forall z$ (αφού εάν $g(z)=0$ τότε απο την υπόθεση $|f(z)| < 0$ πράγμα αδύνατο)
Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$, $g(z) \neq 0$
Άρα, $|f(z)| < |g(z)| \Rightarrow |h(z)| < 1 \ , \ \forall z \in \mathbb{C}$
Άρα, η h φραγμένη και σαφώς ακέραια.
Ταυτόχρονα απο το θεώρημα Liouville $h(z) = σταθ$
οποτε θα ισχύει και $h(z) = h(0) \Rightarrow f(0)g(z) = f(z)g(0)$.

iii) Προφανώς και εδώ $f(z) \neq 0, \forall z$ (αφού αν $f(z)=0$ τότε απο την υπόθεση $|-i| = 1 < 0$ αδύνατο)
Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση:
$g(z) = \dfrac{f(z)-i}{f(z)e^z}$ ακέραια.

Επίσης,
$$\left| \frac{f(z)-i}{f(z)e^z} \right| = \left| \frac{1}{e^z} - \frac{i}{f(z)e^z} \right| = \left| \frac{1}{e^z} \left(1 - \frac{i}{f(z)} \right) \right| = \frac{1}{e^z} \left| \frac{f(z)-i}{f(z)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{e^z} \cdot \frac{\cancel{|f(z)|} \cdot e^{Re(z)}}{\cancel{|f(z)|}} = \frac{1}{e^z} e^{Re(z)} = \frac{1}{\cancel{e^x} \cdot e^{iy}} \cdot \cancel{e^x} = \frac{1}{e^{iy}} \xrightarrow{y \to \infty} 0$$
Άρα, η g φραγμένη.
Συνεπώς, εκ του θεωρήματος Liouville : $g(z) = \alpha, \forall z$
όπου α:(σταθ.) μιγαδικός αριθμός. Έπεται λοιπόν ότι:
$f(z) - i = \alpha f(z) e^z \ , \ \forall z$.

Αρκεί λοιπόν νδο $\alpha=0$ ώστε να ισχύει $f(z)=i$
Έστω ότι $\alpha\neq 0$ τότε θέτουμε $z:=Log\left(\frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e^{z}=\frac{1}{a} \Leftrightarrow a=e^{-z}$. Αντικαθιστώντας:
$f(z)-i= a e^{-z} f(z) e^{z} = f(z)$ Άτοπο.
Άρα, το $\alpha=0$ για όλα τα $z\in\mathbb{C} \Rightarrow f(z)=i, \forall z\in\mathbb{C}$

Άσκηση 44

Να αποδείξετε ότι:
i) δεν υπάρχει (μη σταθερή) πολυωνυμική συνάρτηση P τ/ω $|e^{z}+P(z)| \leq e^{Re(z)}, \forall z\in\mathbb{C}$
ii) αν μία ακέραια συνάρτηση f στο μιγαδικό επίπεδο είναι τ/ω: $Re(f(z))\leq 0, \forall z\in\mathbb{C}$ τότε αυτή είναι σταθερή

ΛΥΣΗ

i) Έστω ότι υπάρχει τέτοια πολυωνυμική συνάρτηση P.
Δηλ. $|e^{z}+P(z)| \leq e^{Re(z)} \Rightarrow \left|\frac{e^{z}+e^{P(z)}}{e^{z}}\right| \leq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{e^{z}+P(z)}{e^{z}}$ φραγμένη

Επίσης, $\frac{e^{z}+P(z)}{e^{z}}$ ακέραια

Άρα, από Θεώρημα Liouville είναι σταθερή.
Δηλαδή, $P(z)=c\cdot e^{z}-e^{z}=(c-1)e^{z}, \forall z\in\mathbb{C}$
- Αν $c=1$ τότε $P(z)=0$ Άτοπο (αντίκειται στην Υποθ.)
- Αν $c\neq 1$ τότε $P(z)=(c-1)e^{z}$, δηλ. η P είναι ένα μη μηδενικό πολλαπλάσιο της e^{z}. Αλλά, αν $deg(P(z))=k$ τότε:
$P(z)=(c-1)e^{z}=P'(z)=P''(z)=\ldots=P^{(k)}(z)=0$
$\Rightarrow e^{z}=0$ Άτοπο

ii) Έστω $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)\neq$ σταθ $\Rightarrow u(x,y)\leq 0$
Έτσι η συνάρτηση $g(z)=e^{f(z)}$ είναι ακέραια και $|g(z)|=|e^{u(x,y)}|\leq e^{0}=1$ φραγμένη.
Άρα, από Liouville $\rightarrow g(z)=$ σταθ $\Rightarrow f(z)=$ σταθ (άτοπο)

Άσκηση 45

Ποιες οι ακέραιες συναρτήσεις f που ικανοποιούν τις σχέσεις $f(z)=f(z+1)=f(z+i)$, $\forall z\in\mathbb{C}$

ΛΥΣΗ

Καταρχήν παρατηρούμε ότι $f(z)=f(z+1)$ και άρα για $z=z+1$ ισχύει $f(z+1)=f(z+2)$ $\Big\}$ $f(z)=f(z+2)$

Οδο $f(z+k)=f(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{Z}$

Έστω λοιπόν τυχαίο $k\in\mathbb{Z}$.

Για $k=1 \rightarrow f(z)=f(z+1)$, $\forall z\in\mathbb{C}$ (ΙΣΧΥΕΙ)

υποθέτουμε ότι ισχύει για $k=k \rightarrow f(z)=f(z+k)$ $\forall z\in\mathbb{C}$ (1)

και Οδο ισχύει για $k=k+1 \rightarrow f(z)=f(z+k+1)$

Αλλά, για $z=z+1$ στην (1) έχουμε:

$f(z)=f(z+1)=f((z+1)+k)=f(z+k+1)$ $\forall z\in\mathbb{C}$

Επομένως από την αρχή Μαθηματικής επαγωγής προκύπτει

$f(z)=f(z+k)$, $\forall z\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{N}$.

ομοια αποδεικνύουμε και για $-k\in\mathbb{N}$ ότι

$f(z)=f(z-k)$, $\forall z\in\mathbb{C}$, $-k\in\mathbb{N}$ (2)

Αντικαθιστώντας στην (2): $z=z+k$ παίρνουμε

$f(z+k)=f(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$ και $k\in\mathbb{Z}$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $f(z+ki)=f(z)$, $k\in\mathbb{Z}$

Άρα, συνδυαστικά Οδο $\forall m,n\in\mathbb{Z}: f(z)=f(z+m+ni)$, $z\in\mathbb{C}$

Πράγματι, $f(z+m+ni)=f((z+m)+ni)=f(z+m)=f(z)$

Ας είναι τώρα $z\in\mathbb{C}$. Επειδή $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$

$\exists m,n\in\mathbb{Z}$ και $x',y'\in\mathbb{R}$: $0\leq x'<1$, $0\leq y'<1$ τ/ω

$z=x+iy=x'+m+i(y'+n)=m+in+x'+iy'$ όπου

$m=[x]$, $n=[y]$. Άρα, $f(z)=f(m+in+x'+iy')=f(x'+iy')$

με $(x',y')\in[0,1]\times[0,1]$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

$$\max_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|=\max_{(x',y')\in[0,1]\times[0,1]}|f(x'+iy')|.$$

Το $[0,1]\times[0,1]$ κλειστό και φραγμένο και f ακεραία συνάρτηση. Τότε από θεώρημα Liouville συμπεραίνουμε ότι f σταθερή.

Άσκηση 46

Να βρεθεί η τάξη της ρίζας $z=0$ της $f(z) = \dfrac{z^4}{z-\sin z}$.

ΛΥΣΗ

$$z-\sin z = z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) =$$

$$= z^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \dots - (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \dots \right)$$

Άρα, $f(z) = z^1 \cdot h(z)$, $\forall z$, όπου

$$h(z) = \frac{1}{\left(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \dots - (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!} + \dots \right)}$$ ολόμορφη σε

μία περιοχή του $z=0$ με $h(0)=6 \neq 0$

Άρα, το $z=0$ ρίζα πρώτης τάξης ή πολ/τας 1.

Άσκηση 47

Έστω φ πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής τέτοια ώστε $\varphi(2)=0$ και $\varphi(e^{-n})=1$ $\forall n=1,2,\dots$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ολόμορφη $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f(x)=\varphi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι $\exists f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f(x)=\varphi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

άρα αυτή θα είναι σίγουρα ακεραία και μάλιστα ούσα η e^{-n} φραγμένη θα πρέπει: $f(e^{-n})=1$.

Άρα, από αρχή ταυτότητας ολόμορφων συναρτήσεων $f(z)=1$. Άρα $f(2)=\varphi(2)=1$ αλλά $\varphi(2)=0$ άτοπο.

Άσκηση 48:

Να υπολογιστεί η ποσότητα: $\max\{|z^2+iz| : 1\le |z| \le 3\}$.

ΛΥΣΗ

Αρχή του Μεγίστου: Έστω $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη.

Εάν $|f(z)|\le M$, M τοπ. μέγιστο $\Rightarrow f=$ σταθ στο $B(M,R)$

Έστω συνάρτηση $f(z)=z^2+iz$ όπου είναι ολόμορφη στο δακτύλιο $\delta(0;1,3)$. Προφανώς το μέγιστο θα το λάβει στο σύνορο του δακτυλίου, $\partial(\delta(0;1,3))=\gamma_1\cup\gamma_2$ όπου προφανώς $\gamma_1 : z_1(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ και

$\gamma_2 : z_2(t)=3e^{it}$, $\forall t\in[0,2\pi]$.

Πάνω στη γ_1:

$$|f(z_1(t))| = |z_1^2(t)+iz_1(t)| = |e^{2it}+ie^{it}| =$$
$$= |\cos 2t + i\sin 2t + i\cos t - \sin t| =$$
$$= |\cos 2t - \sin t + (\sin 2t + \cos t)i| =$$
$$= \sqrt{(\cos 2t-\sin t)^2+(\sin 2t+\cos t)^2} =$$
$$= \sqrt{2+2\sin t} \le \sqrt{2+2} = 2$$

Πάνω στη γ_2:

$$|f(z_2(t))| = |z_2^2(t)+iz_2(t)| = |9e^{2it}+i3e^{it}| =$$
$$= |9(\cos 2t + i\sin 2t) + i(3\cos t + i3\sin t)| =$$
$$= |9\cos 2t - 3\sin t + (9\sin 2t + 3\cos t)i| =$$
$$= \sqrt{(9\cos 2t-3\sin t)^2+(9\sin 2t+3\cos t)^2} =$$
$$= \sqrt{90+54\sin t} \le \sqrt{90+54} = 12 \longrightarrow$$

Η μέγιστη τιμή της ποσότητας $|z^2+iz|$.

Άσκηση

Έστω $f : B_0(z_0,R) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη στο $B_0(z_0,R)$.

Τότε νδο η ανωμαλία της f στο z αίρεται

αν.ν $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z)=0$

ΛΥΣΗ

Έστω $f : B_0(z_0,R)\to\mathbb{C}$ ολόμορφη στο $B_0(z_0,R)$

Το ικανό είναι προφανές (αφού αν η ανωμαλία αίρεται στο z_0 τότε $\exists g : B(z_0,R)\to\mathbb{C}$ ολόμορφη με $g(z)=f(z)$, $z\in B_0(z_0,R)$

άρα το $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)g(z) = 0$)

Τώρα θα δείξουμε το αναγκαίο.

Έστω ότι $\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$g(z) = \begin{cases} (z-z_0) f(z), & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

ολόμορφη στον $B_0(z_0, R)$ και αφού το όριο της g υπάρχει στο z_0 τότε g τοπικά φραγμένη.
Από γενικό Θεώρημα Cauchy η g ολόμορφη παντού το z_0 ρίζα της g άρα $g(z) = (z-z_0) h(z)$, $\forall z \in V_{z_0}$ ώστε $V_{z_0} \subseteq B(z_0, R)$. Η h ολόμορφη στη V_{z_0}. Τότε $h(z) = f(z)$ $\forall z \in B_0(z_0, R) \Longrightarrow h$ ολόμορφη επέκταση της f.

Άσκηση 49

i) Να βρεθεί ο πόλος της συνάρτησης $f(z) = \frac{\eta\mu z}{z^3}$

ii) Να βρεθεί το ουσιώδες ανώμαλο της $g(z) = e^{\frac{1}{z}} \cdot z^2$

ΛΥΣΗ

i) Η $\frac{1}{z}$ ολόμορφη $\forall z \in \mathbb{C}^*$ και $\eta\mu z$ ολόμορφη στο 0

αλλά $\lim_{z\to 0} \eta\mu z = 0$

$$\eta\mu z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots = z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots\right)$$

Άρα, $f(z) = z^{-2}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots\right)$

Άρα, το $z=0$ πόλος $2^{ης}$ τάξης

β' τρόπος $\lim_{z\to 0} (f(z) \cdot z^2) = \lim_{z\to 0} \frac{\eta\mu z}{z} = 1 \neq 0$

Άρα, πόλος $2^{ης}$ τάξη)

ii) Κατάταξη το 0 ανώμαλο της g

$$e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

Τότε, $f(z) = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)^n}{n!} =$

$$= z^2\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\dots\right) =$$

$$= z^2 - z + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} - \dots$$

αλλά το όριο της $f(z)$, $z\to 0$ δεν υπάρχει.

Άρα, $z=0$ ουσιώδες ανώμαλο.

Άσκηση 50

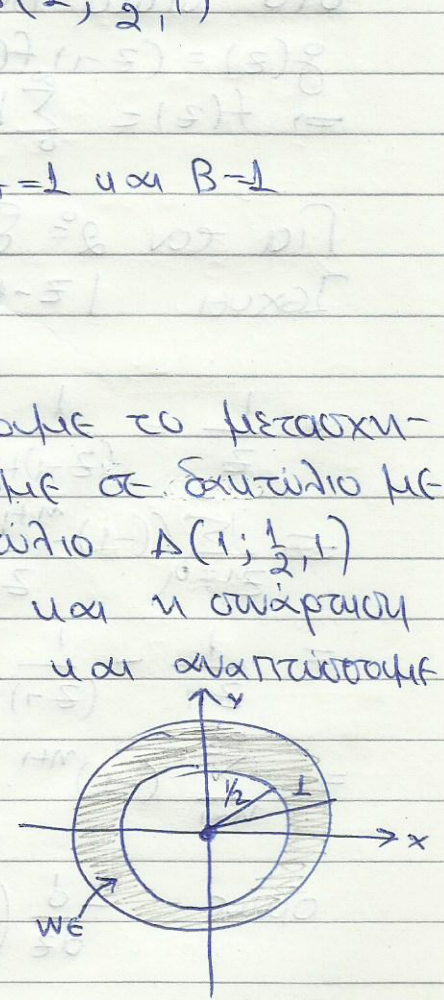
i) Να αναπτυχθεί κατά σειρά Laurent η συνάρτηση $f(z)=\frac{3z-3}{(2z-1)(z-2)}$ στο δακτύλιο $\Delta(1;\frac{1}{2},1)$

ΛΥΣΗ

$$\frac{3z-3}{(2z-1)(z-2)} = \frac{A}{2z-1}+\frac{B}{z-2} \Rightarrow \dots \Rightarrow A=1 \text{ και } B=1$$

άρα, $f(z)=\frac{1}{2z-1}+\frac{1}{z-2}$

Ο δακτύλιος έχει κέντρο το 1. Κάνουμε το μετασχηματισμό $w=z-1$ για να αναχθούμε σε δακτύλιο με κέντρο το 0. (Δηλαδή από το δακτύλιο $\Delta(1;\frac{1}{2},1)$ πηγαίνουμε στο δακτύλιο $\Delta(0;\frac{1}{2},1)$ και η συνάρτηση $f(z)=f(w+1)=g(w)=\frac{1}{2w+1}+\frac{1}{w-1}$ και αναπτύσσουμε τα κλάσματα στο $\Delta(0;\frac{1}{2},1)$



$$\frac{1}{2w+1} = \frac{1}{2w}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2w}} = \frac{1}{2w}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2w}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2w)^{n+1}} \quad (1)$$

$$\frac{1}{w-1} = -\frac{1}{1-w} = -\sum_{n=0}^{\infty} w^n \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1} \cdot 2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n.$$

ii) Να υπολογιστεί ο συντελεστής b_{-2} του αναπτύγματος σε σειρά Laurent κέντρου το 1 της συνάρτησης $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)}$.

Λύση

Τα σημεία $z=0$ και $z=1$ είναι πόλοι της f και έχουν απόσταση $d(0,1)=1$. Άρα, η f αναπτύσσεται σε σειρά Laurent στους δακτυλίους:

1. $\Delta(1;0,1)$ και 2. $\Delta(1;1;\infty)$

Για τον 1ο δακτύλιο:

Θεωρώντας συνάρτηση $g(z) = (z-1) f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ ολόμορφη στο δίσκο $B(1,1)$ έχει σειρά Taylor

$$g(z) = (z-1) f(z) = \sum_0^{\infty} b_n (z-1)^n \Rightarrow f(z) = (z-1)^{-1} \cdot \sum_0^{\infty} b_n (z-1)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_0^{\infty} b_n (z-1)^{n-1} \Rightarrow \boxed{b_{-2} = 0}$$

Για τον 2ο δακτύλιο:

Ισχύει $|z-1| > 1 \Rightarrow 1 > \frac{1}{|z-1|}$. $\left(f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)} \right)$

$$\bullet \ \frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{z-1} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} \right) = \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-1)^n}$$

$\frac{1}{z-1} < 1$

$$= \frac{1}{z-1} \left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{1}{(z-1)^4} + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot (z-1)^n.$$

όμως $-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^{n+1} \cdot (z-1)^{-n-1}$

αφού κέντρο το 1.

Επίσης, $e^{z} = e \cdot e^{z-1} = e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{k!}$

Έτσι στο $\Delta(1; 1, +\infty)$ έχουμε

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{z-1} \cdot e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1} (z-1)^{-n-1} =$$

$$= (-)e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1} (z-1)^{-n-2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(-1)^n}{k!} (z-1)^{k-n-2} =$$

$$= \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\lambda+3}^{\infty} \frac{e(k-\lambda-2)(-1)^{k-\lambda-2}}{k!} (z-1)^{\lambda}, \quad \lambda := k-n-2$$

άρα οι συντελεστές δίνονται από τον τύπο

$$b_\lambda := \sum_{k=\lambda+3}^{\infty} \frac{e}{k!} (k-\lambda-2)(-1)^{k-\lambda}$$

όπου $b_{-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e}{k!} k(-1)^k = -e \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (-1)^m = -e e^{-1} = -1.$